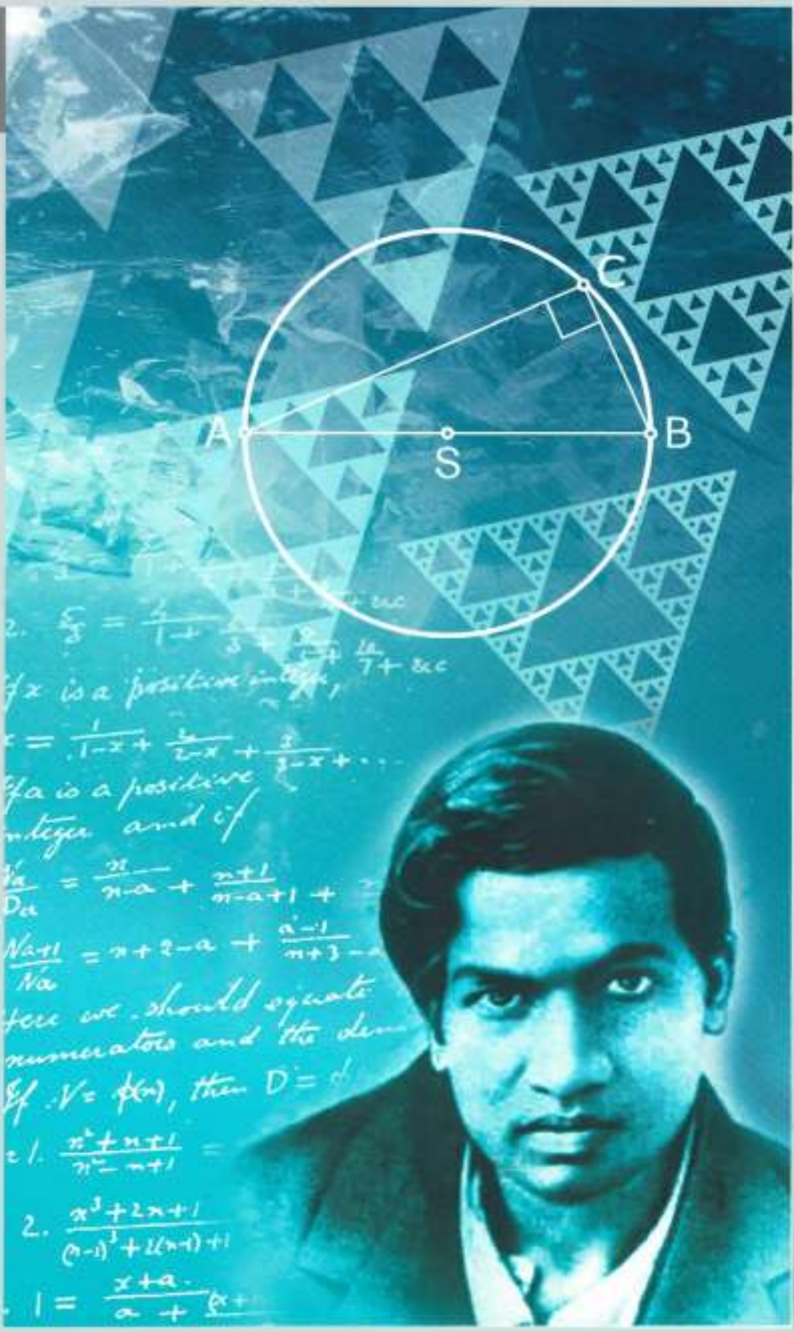
Matematika v šoli

Poštnina plačana pri pošti 1102 Ljubljana

2019, letnik 25 **1**



IZ TEORIJE ZA PRAKSO:

Alternativni algoritmi pisnega množenja

Nekaj dokazov Talesovega izreka

IZ RAZREDA:

Od sladkorja do odvajanja

MATEMATIKA SKOZI ZGODOVINO:

Srinivasa Aiyanger Ramanujan (1887–1920) – 1. del

NOVICE:

Tatjana Kerin, dobitnica priznanja Blaža Kumerdeja za leto 2018

Zavod Republike Slovenije za šolstvo

Srinivasa Aiyangar Ramanujan (1887–1920) – 1. del

mag. Milena Strnad in
Aleksander Simonič, mag. mat.
The University of New South Wales (Canberra), ACT, Australia

Izvleček

Članek v dveh delih prinaša podroben prikaz življenja in dela skrivnostnega indijskega matematičnega genija S. A. Ramanujana, ki vse od leta 1920 dalje navdušuje mlade Indijce za matematiko. Prvi del se osredotoči na njegovo mladost v Indiji, zaključi pa z vsebino znamenitih pisem med njim in angleškim matematikom G. H. Hardyjem. Članek obeležuje njegovo minulo 130. obletnico rojstva in prihajajočo 100. obletnico smrti, učiteljem pa ponudi zgodbo, da z njo lahko navdušijo tudi slovensko mladino za učenje in raziskovanje matematike.

Ključne besede: S. A. Ramanujan, G. H. Hardy, biografije

Srinivasa Aiyangar Ramanujan (1887–1920) – Part 1

Abstract

The main focus of this two-part article is a detailed account of the life and work of S. A. Ramanujan. Ever since 1920, this mysterious Indian mathematical genius has inspired young Indians to study mathematics. The first section examines his early years in India and concludes with the content of the celebrated letters between Ramanujan and the English mathematician G. H. Hardy. The article marks the recent 130th anniversary of Ramanujan's birth and the forthcoming centennial of his death. In addition, it provides a wealth of information for Slovenian teachers, who can use it to inspire future generations of students to learn and research mathematics.

Keywords: S. A. Ramamujan, G. H. Hardy, Biographies

Ramanujanova mladost

V Južni Indiji[1] se je v revni brahmanski in s hindujsko tradicijo prežeti družini trgovca s sariji K. Srinivasa Iyengarja, na domu svoje matere Komalattammal v vasici Erode, 22. decembra 1887 rodil **Srinivasa Aiyangar Ramanujan**. Bil je zelo zaželen otrok, za katerega je matematično in pevsko nadarjena, izobražena, odločna in pobožna mati trdila, da je po družinski prerokbi božji otrok, skozi katerega bo spregovorila družinska boginja Namagiri iz templja Namakkal. Spregovoril je šele s tremi leti in zelo hitro usvojil tamilščino, katere zapleteno abecedo sestavlja 12 soglasnikov, 18 samoglasnikov in njihovih 216 kombinacij. Še bolj pa je izstopal z izjemno matematično nadarjenostjo. Rad je imel števila in je z njimi že v rosni mladosti spretno računal. Od prvega leta starosti dalje je z manjšimi presledki 20 let bival v Kumbakonamu, živahnem mestu trgovcev, rokodelcev in templjev, ki je imelo takrat okoli 53000 prebivalcev.

Bil je svojeglav in živahen otrok, vzkipljivega značaja, ki se je zelo razburil, če ni bilo vse po njegovem. Stroga mati ga je zaščitila pred možnimi otroškimi prepiri tako, da mu je preprečevala druženje z vrstniki. Doma mu je tako vedenje dopuščala, ker ga je zaradi nadarjenosti občudovala, morda pa tudi zato, ker sta Ramanujanu do njegovega šestega leta po nekaj mesecih življenja umrla majhna bratca in sestrica. Brata, ki sta preživela, je dobil kot desetletnik in sedemnajstletnik, torej v času, ko je bil že pošteno vpet v šolanje.

S petimi leti je začel obiskovati bližnjo dveletno osnovno šolo *pial*, kjer so učencem urili spomin s prepevanjem, recitiranjem in prepisovanjem verzov iz hindujskih svetih knjig Ved. S sedmimi leti, ko je pred tem prve osnovnošolske korake poskušal narediti po več šolah po Južni Indiji, je šolanje nadaljeval na osnovni šoli Kangeyan v Kumbakonamu blizu svojega doma, ki danes ne obstaja več. Ko so pri matematiki prvič obravnavali deljenje, je

1 Danes je to v zvezni državi Tamil Nadu z glavnim mestom Chennai. Takrat se je država imenovala Tanjor, glavno mesto Madras, britanska kolonija Indije pa Britanska vladavina (British Raj; raj pomeni pravilo). To preimenovanje nekdanje kolonije Indije je storila kraljica Viktorija po svojem kronanju za cesarico Velike Britanije in Indije leta 1857. British Raj je prenehal obstajati z osamosvojitvijo Indije leta 1947.

takoj ugotovil, da učiteljeva razlaga, *če število deliš s samim seboj, dobiš vedno 1*, ni popolna, ker velja le za števila, različna od nič. Sošolcem je takoj nazorno razložil, da deljenje z 0 ni dovoljeno, ker bi v tem primeru dobili čudne rezultate. Sošolce, svojega učitelja in številne prijatelje je očaral z izjemno hitrim računanjem, saj je brez težav množil in razcepljal večmestna števila na prafaktorje. Njegov osnovnošolski učitelj je o njem dejal [7, str. 27]:

Ramanujan si zasluži več, kot obsega najvišja ocena, je izven možnosti meritve z običajnimi merili ocenjevanja. 100-odstotno znanje je zanj preslaba ocena.

Slika 1: Ramanujanova otroška soba v Kumbakonamu

Večino svojega prostega časa je zaradi materine stroge vzgoje preživel doma na vrtu ali v sobi (Slika 1), kjer se je v osami zabaval tako, da je na prenosni tablici iz skrila (Slika 2) preverjal svoje enačbe in razne matematične igrice, kot so magični kvadrati. Svoja odkritja je skozi okno navdušeno razlagal vrstnikom.

Slika 2: B. C. Berndt[2] z Ramanujanovo tablico

Rezultate je Ramanujan začel zapisovati v angleščini na liste, ki so bili osnova za slavne *beležke*[3] (ang. Notebooks), glej sliki 3 in 4. Pogosto je zahajal tudi v hlad bližnjega svetišča, tam sanjaril, spal na peščenih tleh in po njih računal.

Slika 3: Originalne beležke, danes shranjene v knjižnici Univerze v Madrasu.

Novembra leta 1897 je kot najboljši v državi Tanyor pri vseh predmetih (angleščini, tamilščini, aritmetiki in geografiji) opravil izpite in se naslednje leto samo s polovično šolnino vpisal na Mestno visoko šolo v Kumbakonamu, oddaljeno komaj 20 minut hoda od doma. S svojo neverjetno matematično zmožnostjo si je tudi tu pridobil občudovanje prijateljev, čeprav ti pogosto niso razumeli njegovih razlag. Slovel je tudi kot izjemen pripovedovalec zgodb in šal, ki se jim je tudi sam prešerno smejal. Rad je pomagal. Tako je kot srednješolec univerzitetnim študentom, ki jih je srečeval na poti do šole, reševal matematične naloge. Znana je zgodba, da je rešitev $x = 9$, $y = 4$ sistema enačb $\sqrt{x} + y = 7, \sqrt{y} + x = 11$ dobil zgolj z bežnim pogledom. S tem si je leta 1902 pridobil velikega občudovalca in prijatelja Rajagopalacharija, ki mu je osem let kasneje, ko je bil Ramanujan v hudi eksistenčni krizi, pomagal.

Slika 4: Druga izdaja faksimil vseh treh beležk v dveh knjigah.

2 Bruce Carl Berndt (1939–) je ameriški matematik, ki deluje na področju analitične teorije števil. Zaslužen je za ohranitev in razlago Ramanujanovih neobjavljenih zapisov, o čemer je v soavtorstvu napisal in uredil več knjig. Leta 1996 je prejel Steelovo nagrado za pisanje v matematiki, ki jo podeljuje *Ameriško matematično društvo*, ter leta 2012 častni doktorat Univerze SASTRA v Kumbakonamu.

3 Ramanujan je zapustil tri zvezke (Slika 3), v katere je v obdobju 1903–1914 *beležil* svoja odkritja. Najobširnejša in najpomembnejša je *Druga beležka*, ki vsebuje 21 urejenih poglavij (252/355 str.), preostalo pa je neurejeno. Nastala je s prepisovanjem starejše *Prve beležke*, ki vsebuje 16 poglavij (134/214 str.). *Tretja beležka* ima samo 33 strani neurejenega materiala. B. C. Berndt je s sodelavci v letih 1985–1998 beležke opremil s komentarji in dokazi. Rezultat tega dela je pet knjig (2301 str.), vse izdane pri založbi Springer. Več o zgodovini in vsebini beležk lahko bralec poišče v [2], nekaj od tega pa bo bomo omenili v drugem delu.

Posebno vlogo sta v Ramanujanovi mladosti odigrali dve matematični knjigi: Loneyeva *Trigonometrija v ravnini*[4] in Carrov *Synopsis*[5].

Prvo je dobil v roke kot dvanajstletnik od starejših študentov. Knjiga ga je navdušila in še preden jo je prebral do konca, je samostojno odkril, da se funkciji sinus in kosinus lahko izrazita tudi z neskončnimi vrstami. Ko pa je pozneje v drugem delu Loneyeve knjige prebral, da je to izpeljavo poldrugo stoletje pred njim odkril že Leonhard Euler (1707–1783), je to spoznanje občutil kot nekaj sramotnega in je zato svoj zapis skril na domačem podstrešju. To kaže na njegovo izjemno občutljivost in notranjo nemoč premagati oseben, čeprav samo dozdeven poraz.

Drugo, zanj usodnejšo knjigo, je dobil pri petnajstih letih od študentov, ki so si jo izposodili v knjižnici Državnega kolidža v Kumbakonamu. V knjigi je zbranih in sistematično urejenih 4417 matematičnih formul, ki pa so v večini opremljene brez posebne razlage, z redkimi zgledi uporabe in skoraj nobenim dokazom. Formule, ki so pokrivale vsa bistvena spoznanja matematike 19. stoletja iz algebre, trigonometrije, diferencialnega in integralnega računa ter analitične geometrije, je v sklopu zasebnega tutorstva za pripravo študentov na izjemno zahteven izpit *Tripos*[6] na Cambridgeu več desetletij zapisoval matematični entuziast **George Shoobridge Carr** (1837–1914), ki pa mu ni uspelo v akademskih krogih in se je preživljal z inštruiranjem matematike. Opomniti moramo, da to nista edini knjigi, ki ju je Ramanujan poznal pred odhodom v Anglijo leta 1914, glej [5].

Ramanujana, ki je že poznal precejšen del klasične matematike, so formule v *Synopsisu* takoj očarale. Lotil se je njihovega preverjanja, po Carrovem zgledu pa je začel tudi sam v *Prvo beležko* dodajati vse več lastnih formul, ki jih je najverjetneje zaradi predragega papirja preverjal v pesku ali na tablici. Po njej je neprestano pisal, brisal pa s svojim desnim komolcem tako, da je nadlaket zvil k sebi in komolec uporabil za radirko. Kanigel v [7, str. 92] opisuje, kako mu je pozneje, v srečnem Ramanujanovem letu leta 1912, njegov prijatelj dejal:

Pravijo, da si genij.

Ramanujan mu je odgovoril:

Kakšen genij. Poglej moj komolec. Ta ti govori mojo zgodbo. Moj komolec dela genija iz mene.

To je dragocena Ramanujanova izjava o načinu njegovega dela. Vsem, ki so prej ali pozneje drezali vanj s vprašanjema *Kako delaš?* in *Kako razmišljaš?*, je odgovarjal, da on samo zapisuje formule, govorico bogov, ki mu jih prišepetava boginja Namagiri.

Zaključimo razdelek z Ramanujanovim najbolj znanim prispevkom s tega obdobja, *magičnimi kvadrati*, katerih vsebina sestavlja prvo poglavje v obeh beležkah in je izrazito starejša od preostalega rokopisa. Sledimo [3].

Magični kvadrat dimenzije $n \times n$ je sestavljen iz n^2 različnih naravnih števil, zloženih v n vrstic in n stolpcev tako, da so vsote po vrsticah, stolpcih in obeh diagonalah enake nekemu številu, ki ga imenujemo *magično število*. Prva magična kvadrata, ki ju je zapisal, sta

6	1	8
7	5	3
2	9	4

in

15	1	11
5	9	13
7	17	3

Ramanujan je uvodoma podal nekaj preprostih lastnosti magičnih kvadratov dimenzije 3×3. Naj bosta m_1 in m_2 vsoti števil v srednji vrstici in srednjem stolpcu ter c_1 in c_2 vsoti števil v prvi in drugi diagonali. Potem velja $3x = m_1 + m_2 + c_1 + c_2 - S$, kjer je S vsota vseh števil v kvadratu, x pa število v sredini kvadrata. Pri tem ni treba, da je kvadrat magičen. Če pa je, sledi $x = r/3$, kjer je r magično število. Opazimo, da za levi kvadrat velja $r = 15$, sredinsko število pa je 5, kar je v skladu s prejšnjo ugotovitvijo. Pozoren bralec lahko na zgornjih primerih opazi, da števila v sredinski vrstici in stolpcu ter obeh diagonalah tvorijo aritmetično zaporedje. Res! Naj bodo a, x, b ta števila. Potem je $a + x + b = r = 3x$ in s tem $a + b = 2x$. Sledi $x - a = b - x$, kar pomeni, da je zaporedje a, x, b aritmetično. V nadaljevanju je dodal nekaj možnih konstrukcij in dejanskih realizacij magičnih kvadratov dimenzij 3×3, 4×4 in 5×5. Navedimo le primer konstrukcije za $n = 4$:

$$\begin{array}{cccc} A+P & D+S & C+Q & B+R \\ C+R & B+Q & A+S & D+P \\ B+S & C+P & D+R & A+Q \\ D+Q & A+R & B+P & C+S \end{array}$$

kjer so A, B, C, D in P, Q, R, S poljubna nenegativna cela števila. Zapisal je poseben primer za $A = 1, B = 3, C = 7, D = 5$ in $P = 0, Q = 8, R = 1, S = 9$:

1	14	15	4
8	11	10	5
12	7	6	9
13	2	3	16

Kot zanimivost povejmo, da se zgornji magični kvadrat v permutirani različici pojavi v znameniti Dürerjevi gravuri *Melencolia I*. Ramanujan obravnava tudi konstrukcije večjih magičnih kvadratov iz manjših ter tako poda primera dimenzije 8×8, kjer je eden sestavljen iz štirih magičnih kvadratov dimenzije 4×4.

4 S. L. Loney, *Plane trigonometry*, 1st ed., Cambridge University Press, 1893.

5 Knjiga G. S. Carr, *A synopsis of elementary results in pure mathematics containing propositions, formulae, and methods of analysis, with abridged demonstrations*, London, F. Hodgson, Cambridge, Macmillan and Bowes, je bila izdana v dveh delih v letih 1880 in 1886. Upravičeno lahko sklepamo, da prav zaradi Ramanujanove vpletenosti *Synopsis* in s tem tudi Carr nista zatonila v pozabo.

6 Zelo zahteven izpit *Mathematical Tripos* je bil pogoj za diplomo BA. Nanj so se študenti pripravljali tri leta. Najboljši so dobili prestižen naziv *Wrangler*: prvi med njimi *Senior Wrangler*, drugi *Second Wrangler* itd. Reforme so leta 1909 med drugim težavnost izpita nekoliko omilile in vrstni red *Wranglerjev* ni bil več javno dostopen. Tak se v precejšnji meri izvaja še danes.

Ramanujanovo univerzitetno obdobje

Šolanje na Mestni visoki šoli v Kumbakonamu je Ramanujan končal z drugim mestom na maturi, ki so jo opravljali na madraški univerzi leta 1903, in si s tem pridobil štipendijo za nadaljnji univerzitetni študij. Januarja 1904 je tako nadaljeval študij na Državnem kolidžu v Kumbakonamu (Slika 5). Zaradi strogih zahtev študija, pa tudi lepih zgradb, ki so bile obdane z vrtom, so ga imenovali Indijski Cambridge[7]. Na njem bi moral Ramanujan dobiti najprej diplomo FA (First Arts) in šele nato bi lahko nadaljeval študij same matematike. Vendar pri študiju, ki je poleg matematike vključeval še psihologijo, grško in rimsko zgodovino ter angleški jezik, ni bil uspešen. Vrtinec preverjanja enačb iz Carrovega *Synopsisa* in izumljanja lastnih ga je vsega potegnil v matematiko, vse ostale predmete študija pa je povsem zanemaril. Tako konec leta 1905 na madraški univerzi ni opravil nobenega izpita za diplomo FA, razen matematike. To, da študija ni končal, je bil za doslej blestečega fanta velikanski poraz, ki ga je zelo prizadel in za vselej zaznamoval. Izgubil je štipendijo, izgubil je zaupanje vase, začel se je bati izpitov, predvsem pa se je sam pred seboj počutil osramočen navznoter še bolj kot navzven. Pobegnil je od doma v upanju, da bo daleč v mestu, kjer bo nepoznan, našel službo in notranji mir. Toda starši so ga s posredovanjem policije po mesecu mrzličnega iskanja našli v 1000 km oddaljenem mestu Vizagapatamu in ga pripeljali domov.

Slika 5: Državni kolidž v Kumbakonamu (današnja podoba).

Naslednje leto je kot samoplačnik nadaljeval študij v oddaljenem Madrasu na kolidžu Pachaiyappa, imenovanem tudi Dragulj vzgojnega sistema Južne Indije, kjer so lahko študirali le Hindujci. Toda tudi tu se je zapletlo. Najprej je moral študij zaradi amebne griže po treh mesecih prekiniti. Povsem izčrpan se je vrnil domov. Ko se je bolezen umirila, se je vrnil v Madras, živel pri prijateljih in se preživljal z inštrukcijami matematike. V maju 1907 si je na kolidžu Pachaiyappa (Slika 6) pridobil dovoljenje za ponovno opravljanje izpitov za diplomo FA. Tudi tokrat je padel pri angleščini, sanskrtu, zgodovini in fiziologiji. Opravil je le izpit iz matematike in še tu je dosegel samo 85 točk od 150 možnih in 45 potrebnih[8]. S tem si je v Indiji za študij matematike, ki bi sledil po opravljeni diplomi FA, dokončno zaprl vsa vrata.

Slika 6: Kolidž Pachaiyappa (današnja podoba).

Težki izgubljeni leti in začetek poti iz bede

Tako se je Ramanujan leta 1908 ponovno znašel doma v Kumbakonamu. Odločna mati in glava družine mu je v želji, da bi njen sin vsaj odrastel in se osamosvojil, že v tem letu začela iskati bodočo ženo. Hitro je poiskala primerno dekle in Ramanujana, moževemu nasprotovanju navkljub, že julija 1909 poročila s takrat desetletno Janaki Amal (1899–1994). S tem je po indijskih zapovedih najvišje kaste brahmanov, ki jim je pripadala vsa družina, Ramanujana prisilila, da si je moral začeti iskati službo, da bo ob polnoletnosti žene lahko prevzel skrb za družino in zaživel skupaj z njo. Po poroki, na kateri sta se ženin in nevesta prvič videla za nekaj trenutkov, se je namreč njegova žena do polnoletnosti morala vrniti k svojim staršem v uk za gospodinjska dela, sam pa se je dve težki in naporni leti brez sredstev, odvisen od prijateljev in občasnih inštrukcij, potikal po Južni Indiji in si na ta način iskal službo. Trkal je na vrata pomembnih indijskih mož in jim kazal beležki, saj sta bili to njegovi edini spričevali. Ob tem je žel njihovo občudovanje, ni pa si pridobil njihove pomoči, saj naprošeni, čeprav so bili matematiki, niso razumeli napisanih matematičnih trditev tudi zato, ker je v njih Ramanujan pogosto uporabljal svoje nestandardne oznake.

Sreča se je Ramanujanu nasmehnila šele leta 1910 ob četrtem obisku matematika **Derwana Ramashandra Raoa** (1871–1936) v mestu Tirukoilur, ki je opravljal službo pobiralca davkov v okrožju Neville. Da je Rao popustil in dal siromašnemu Ramanujanu majhno državno podporo 25 rupij mesečno za dobo enega leta, je bil zaslužen že omenjeni prijatelj Rajagopalachari.

7 Kolidž je bil leta 1854 nameščen v dvorec nekdanjega tanjurskega maharadže. Od leta 1971 do 1880 so dvorec prenavljali in zgradili še eno stavbo. V času Ramanujanovega študija je na njem poučevalo samo 12 profesorjev. V tem obdobju je akademsko leto na indijskih univerzah potekalo od januarja do decembra, da so Angleži lahko s svojimi družinami preživljali božične praznike v svoji deželi.

8 Berndt in Reddi ugotavljata, zakaj se je Ramanujan tako slabo izkazal pri izpitu iz matematike. Najverjetneje je to posledica Ramanujanovega precejšnjega nezanimanja za geometrijo. Dve tretjini izpita, ki je skupaj z maturitetnimi nalogami reproduciran v [6], so sestavljale naloge iz trigonometrije z nekaterimi bolj geometrijskimi nalogami in geometrije.

Ta mu je za zadnji obisk Raoa priskrbel tudi ugodno priporočilo profesorja matematike **Saldhana** iz Bombaya, ki je iz dela Ramanujanovih zapisov v njem prepoznal izjemnega matematika.

Skromna štipendija je Ramanujana osvobodila boja za preživetje in tako je v Madrasu zaživel. Živel je skupaj s prijateljem, poučeval študente z Državne univerze, sam pa raziskoval matematiko in pisal članke. Prvi Ramanujanov matematični članek *Nekatere lastnosti Bernoullijevih števil*[9] je izšel leta 1911 na 16 straneh v *Reviji indijskega matematičnega društva*, ki je še danes osrednja publikacija te ustanove. Ta števila je Ramanujan spoznal leta 1904, ko je dobil v roke drugi del Carrovega *Synopsisa*, ni pa poznal nadaljnjih študij drugih matematikov o njih. Genezo članka lahko najdemo v petem poglavju *Druge beležke*.

Ob ta članek se je že v letu 1912 obregnil angleški matematik Hill. Temeljit komentar nanj, ki je nastal po Ramanujanovi smrti, pa najdemo v [8, Dodatek I] in ni preveč entuziastičen: *Članek je zanimiv kot primerek Ramanujanovega zgodnjega načina pisanja, toda ključne ugotovitve so dobro znane in dokazi nepopolni.* Wagstaff ga je v [9] podrobno analiziral. Res je, da je bila večina trditev že znana, prav tako se je na nekaterih mestih Ramanujan preprosto zmotil. Toda Bernoullijeva števila se pojavijo na številnih matematičnih področjih, zato so mnoge njihove lastnosti že pred Ramanujanom večkrat na novo odkrili. Prav tako so Ramanujanovi dokazi, čeprav nepopolni, zelo originalni in nekatere so pozneje celo popravili.

Bernoullijeva števila B_n se običajno definirajo s potenčno vrsto

$$\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} x^n,$$

ki konvergira za $|x| < 2\pi$. Prvi štirje členi so $B_0 = 1$, $B_1 = -1/2$, $B_2 = 1/6$ in $B_3 = 0$. Izkaže se, da za $k \in \mathbb{N}$ velja $B_{2k+1} = 0$. Bernoullijeva števila za $n \geq 2$ zadoščajo zvezi

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} B_k = 0.$$

To je v bistvu rekurzivna zveza, saj nam poznavanje prvih $n-1$ števil omogoča izračun števila B_{n-1}, uporabi pa se lahko tudi za samo definicijo števil. Pomembna posledica je $B_n \in \mathbb{Q}$.

Ramanujanov članek se po vsebini deli na del z rekurzivnimi formulami in del s številskimi lastnostmi. V prvem delu je izpeljal razne rekurzivne formule, med drugim tudi zgornjo, z namenom lažjega računanja Bernoullijevih števil, ki jih je izračunal po vrsti do B_{46}. Pozneje se je izkazalo, da je bila samo enačba

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{6n+2}{6k} B_{6k} B_{6n+2-6k} = -\frac{6n+1}{3}$$

zares nova. V drugem delu je podal nepopoln dokaz pomembne trditve

$$B_{2n} + \sum_{p-1|2n} \frac{1}{p} \in \mathbb{Z},$$

kjer so p praštevila. To je *von Staudt-Clausenov izrek* (1840), za katerega se zdi, da ga ne Ramanujan ne uredništvo revije nista poznala. Popravljen dokaz lahko najdemo v [9]. Ta izrek ima za posledico pomembno trditev, da je imenovalec okrajšanega ulomka števila B_{2n} enak produktu tistih praštevil p, za katera velja $p-1 \mid 2n$. To nam med drugim zagotavlja, da je imenovalec števila B_{2n} vedno deljiv s 6, kar je Ramanujan v članku neposredno izpostavil. V nadaljevanju je navedel še razne izreke s kongruencami za števce in imenovalce Bernoullijevih števil. Omenimo le *J. C. Adamsov izrek* (1878): *Če obstaja tak $r \in \mathbb{N}$, da za praštevilo p velja $p^r \mid 2n$ in $p-1 \nmid 2n$, potem p^r deli števec števila B_{2n}.* Ramanujan je trdil, da je kvocient števca in največjega takega delitelja praštevilo, toda to ni res. Vzemimo

$$B_{22} = \frac{854513}{138} = \frac{11 \cdot 131 \cdot 593}{2 \cdot 3 \cdot 23}.$$

Praštevilo 11 ustreza pogojem iz izreka, toda $854513/11 = 131 \cdot 593$ ni praštevilo. To ni edina napaka. Trdil je tudi, da je števec okrajšanega ulomka $B_{2n}/(2n)$ vedno praštevilo. Protiprimera sta npr. $B_{22}/22$ in $B_{20}/20$.

Od leta 1912 dalje je Ramanujan v *Journal of the Indian Mathematical Society* objavil kar enajst od skupno 37 člankov. Pri tem nismo šteli njegovih matematičnih vprašanj, ki jih je zastavljal v tej reviji v tem obdobju in na katera je potem večinoma odgovarjal sam. S tem je postal prepoznaven ne samo med indijskimi matematiki, pač pa so se zanj začeli zanimati odlični angleški matematiki, ki so takrat v Indiji zasedali pomembne državne službe in so pozneje zelo vplivali na nadaljnji potek Ramanujanovega življenja.

Prva ocena Ramanujanovega dela

Kljub temu, da je Ramanujan končno vsaj malo svobodno zadihal, je še naprej iskal ustrezno službo. Delo, ki ga je opravljal samo nekaj tednov na Glavnem računovodskem uradu v Madrasu, mu ni ustrezalo. Ko je izvedel za možnost zaposlitve v velikem pristaniškem podjetju Port Side v Madrasu, je 9. februarja 1912 napisal prošnjo in ji priložil priporočilo angleškega matematika **E. W. Middlemasta**[10], v katerem je slednji izpostavil Ramanujanovo neverjetno zmožnost računanja. Dobil je službo v podjetju, ki ga je vodil zelo ugledni Irec **Sir Francis Spring**[11] (Slika 7), njegov neposredni šef pa je bil matematik **S. Narayana**[12] (Slika 8). Oba sta v Ramanujanu hitro prepoznala genialnega matematika,

9 S. Ramanujan, *Some properties of Bernoulli's numbers*, J. Indian Math. Soc. 3 (1911), 219–234.

10 Edgar William Middlemast, *Deseti Wrangler*, je bil takrat profesor matematike na Pokrajinskem kolidžu okrožij Bengalije, Bombaya in Madrasa. Leta 1915 je bil izvoljen za tretjega predsednika Indijskega matematičnega društva.

11 Konstruktor, politik in donator Sir Francis Spring (1849–1933) je bil za svoje številne zasluge pri razvoju južne indijske železnice, gradnji mosta čez reko Gadavi in širitvi madraškega pristanišča leta 1911 imenovan za Viteza indijskega imperija. Od leta 1912 dalje je bil tudi »skriti« mecen Ramanujanu.

12 S. Narayana Aiyar (1874–1937) je na kolidžu Svetega Jožefa v Trichinopolu po diplomi nadaljeval kariero kot profesor matematike vse do odhoda k Springu, kjer je bil najprej šef vseh uradnikov, leta 1912 pa je napredoval v glavnega računovodjo družbe. S tem je dosegel najvišje mesto kakega Indijca v družbi Port Trust v Madrasu. Do svojih podrejenih je bil vedno spoštljiv in ljubezniv. Vlada mu je dodelila naziv *Rao Bahadur*, namenjen le najvišjim uradnikom. Vse od ustanovitve Indijskega kluba, ki je pozneje prerasel v Indijsko matematično društvo, je v njem zasedal pomembno mesto. Kljub vsem uspehom je ostal skromen, indijski tradiciji zvest brahman, vedno odet v indijska oblačila in turban. Nikoli ni pozabil, da je izšel iz zelo revne intelektualne družine. Po upokojitvi leta 1934 je ustanovil poseben koncern za pomoč revnim.

Aiyar pa se mu je zelo posvetil in ga vzel v zaščito. Po službenem času sta veliko večerov pozno v noč reševala zapletene matematične probleme v starejši moški hiši v predmestju Madrasa, Triplicanu, blizu njune službe.

Po treh mesecih stalne službe naj bi Ramanujan končno zaživel srečno družinsko življenje z ženo Janaki, ki je vsa leta od poroke dalje živela pri tašči v Kumbakonamu ali pa pri starših v Rajendramu. Preselil se je v majhno hišo svoje babice na cesti Saiva Muthiah Mudali, v dokaj neurejeno madraško predmestje zelo blizu njegove službe. Toda z ženo se je v hišo priselila tudi Ramanujanova oblastna mati, ki je svoji snahi, skladno z indijsko tradicijo, da je sinova žena le njena in sinova sužnja, strogo odmerjala čas, ki ga je Janaki smela preživeti z možem le, ko mu je stregla pri umivanju in obrokih, spati pa je morala pri njej. V času njene odsotnosti je ta strogi nadzor nad Janakinim življenjem prevzela Ramanujanova babica.

Vsebina Middlemastovega priporočilnega pisma Ramanujanu, ki se je širila od ust do ust vplivnih ljudi, je vznemirila indijsko politično in intelektualno javnost. Vplivneži so pričeli raziskovati, kaj neki se skriva v Ramanujanu, da je brez formalne izobrazbe dosegel preboj v sam indijski matematični vrh. Pri tem jih ni vodila samo vedoželjnost, ampak predvsem bojazen, da jih ne bo nekoč obsodila zgodovina, če se izkaže, da je Ramanujan zares čudežni genij in bodo tudi zdaj ponovno odpovedali pri pomoči Ramanujanu in nadaljevali z dosedanjim nerazumevanjem njegove genialnosti. Med njimi je zaživelo intenzivno dopisovanje in poizvedovanje.

Slika 7: Sir Francis Spring

Omenimo le dopisovanje, ki ga je sprožil Ramachandra Rao preko svojega nekdanjega profesorja Griffitha. Sledimo [4]. Griffith je pridobil mnenje angleškega matematika **M. J. M. Hilla**[13] tako, da mu je v Anglijo poslal v oceno nekaj Ramanujanovih odkritij iz beležk in njegov že izdan prvi članek. S tem je prišlo Ramanujanovo delo prvič v neodvisno strokovno presojo zunaj Indije. Hill je v prvem pismu 3. decembra 1912 poslana dela pohvalil. Obregnil se je le ob končne rezultate

$$1 + 2 + 3 + \cdots = -\frac{1}{12},$$
$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots = 0,$$
$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots = \frac{1}{240}.$$

V zvezi s tem je pošiljatelja opozoril [4, str. 16]:

[...] če želi svojo teorijo o neskončnih vrstah objaviti, mora delo še zelo prečistiti, jasno napisati in poskrbeti, da v njem ne bo napak. Predvsem pa v njem ne sme uporabljati simbolov [...], ki jih predhodno ni obrazložil [...]

V branje je Ramanujanu svetoval še Bromwichevo knjigo[14]. V drugem pismu 7. decembra 1912 je podrobneje komentiral Ramanujanov članek. V zvezi z divergentnimi vrstami je zapisal [4, str. 18]:

Ko sem bil sam študent v Cambridgeu, 1876-79, mi teh reči nismo dobro razumeli, čeprav je bila takrat ta moderna teorija že postavljena na čvrsto osnovo. Številni takratni slavni in vzvišeni matematiki so se tudi najprej obregali ob to teorijo, ker je še niso razumeli in so se nad njo zgražali. Zato se mi ne zdi nič presenetljivega, da je gospod Ramanujan, ki je vse to naredil sam, dobil napačen rezultat. Upam, da ga to ne bo prizadelo in mu vzelo poguma.

O vseh izsledkih tega dopisovanja je Griffith poročal tudi Springu, ki je skupaj z Aiyarjem vseskozi verjel v Ramanujanove sposobnosti.

Slika 8: S. Narayana Aiyar

Verjetno se je bralec vprašal, od kod končni izračuni zgornjih vrst, saj že bežen pogled razkriva, da vrste očitno divergirajo. Odgovor se skriva v teoriji ene izmed najslavnejših matematičnih funkcij, *Riemannovi funkciji zeta*. Ramanujan se je z njo podrobneje ukvarjal v petem poglavju *Druge beležke*, sicer pa tudi skozi celotno kariero, saj je funkcija neposredno povezana s praštevili in je ključnega pomena za analitično teorijo števil. Riemannova

13 Micaich John Muller Hill (1856–1929), *FRS* (*The Fellow of the Royal Society* - pomen tega visokega naziva bomo pojasnili kasneje), je leta 1876 pridobil diplomo MA na Univerzitetnem kolidžu v Londonu, leta 1891 pa še naziv ScD na Univerzi v Cambridgeu. Čisto matematiko je poučeval sprva na Univerzi v Birmingham, potem na Univerzitetnem kolidžu v Londonu in kariero zaključil kot *Astor* profesor na Univerzi v Londonu.

14 T. J. I'a. Bromwich, *An introduction to the theory of infinite series*, Macmillan and co., London, 1908.

funkcija zeta je za $\Re\{s\} > 1$ definirana kot $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$. Ta neskončna vrsta za $\Re\{s\} \leq 1$ divergira, zato je na tem območju ne smemo uporabiti. Izkaže pa se, da lahko s sredstvi kompleksne analize ζ-funkcijo analitično razširimo na $\mathbb{C} \setminus \{1\}$, pri čemer ima v točki $s = 1$ enostaven pol. S pomočjo teorije ostankov lahko za $n \in \mathbb{N}$ izračunamo $\zeta(1-2n) = -B_{2n}/(2n)$ in $\zeta(-2n) = 0$, glej npr. [1]. Če pa vseeno zlorabimo oznake s tem, da na teh vrednostih uporabimo vrsto iz definicije, dobimo

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{2n-1} = -\frac{B_{2n}}{2n} \quad \text{in} \quad \sum_{k=1}^{\infty} k^{2n} = 0,$$

v klasičnem smislu nesmiselna rezultata. Od tod sledijo Ramanujanove vrste iz pisma.

Kritika je Ramanujana vznemirila, prav tako je vznejevoljila njegove prijatelje in občudovalce. Ti so Ramanujana opogumili, da je še sam poslal v oceno svoje delo **H. V. Bakerju**[15]. Ker je ostal brez odgovora, je poskusil še pri Bakerjevem kolegu, starejšem profesorju **E. W. Hobsonu**[16]. Po molku tudi z njegove strani mu je njegov nekdanji profesor P. V. Seshu Iyer z Državnega kolidža v Kumbakonamu, ki je takrat poučeval na enem izmed kolidžev madraške univerze, svetoval, naj se obrne še na mlajšega profesorja **G. H. Hardyja**. Posredoval mu je tudi njegovo knjižico *Orders of infinity*[17].

Oris Hardyjevega življenja do leta 1913

Godfrey Harold Hardy (1877–1947) (Slika 10) je bil v tistem času najbolj znan angleški matematik in eden izmed vodilnih raziskovalcev na svetu s področja teorije števil. Bil je strokovnjak tudi za matematično analizo, izjemni mojster strogega dokazovanja, neizprosni kritik in strog ocenjevalec vsega okrog sebe, šarmantni sogovorec, odličen predavatelj in zagovornik čiste in stroge matematike, ki jo je uvedel v angleško matematiko in jo štel za lepo, ter strasten ljubitelj kriketa. Vse življenje je veljal za lepega človeka, čeprav sam ni bil tega mnenja in v svojem okolju ni prenesel ogledal. Življenje je preživel kot ateist, ki je trdil, da je v večnem sporu z bogom, o katerem je govoril, da je njegov največji nasprotnik.

Odraščal je v ambiciozni, prosvetljeni učiteljski družini, kjer so intelektualne vrline in umetnost visoko cenili. Takrat je bilo to značilno le za aristokracijo. Imel je dve leti mlajšo sestro, ki je svoje življenje prav tako posvetila intelektualnemu delu. Deležen je bil skrbne viktorijanske vzgoje ob prijaznem, razumevajočem očetu in strogi, odločni ter hudo pobožni in ambiciozni materi. Ta je od svojega fantiča veliko pričakovala, saj je že pri dveh letih poznal števila do milijon in jih kmalu znal razcepljati. Po zaključku idiličnega osnovnošolskega šolanja v rodni vasici Cranleigh na JV delu Londona je kljub temu, da niso bili bogati, pri dvanajstih letih nadaljeval šolanje na najbolj prestižni javni šoli v Angliji z večstoletno tradicijo, v strogem Winchestru, ki je sprejela samo zelo nadarjene dečke, če so opravili zahteven sprejemni izpit. Od 120 vpisanih so jih sprejeli dvanajst in Hardy je med njimi dosegel prvo mesto. Tega je obdržal skozi vse svoje šolanje.

Po izjemno uspešnem zaključku šolanja v Winchestru je leta 1896 nadaljeval študij matematike na kolidžu Trinity v Cambridgeu (Slika 9), čeprav je imel še veliko drugih darov. Bil je izvrsten igralec in poznavalec kriketa ter že od dijaških let mojster peresa. Po malem se je vse življenje ukvarjal z novinarstvom in v zrelejših letih tudi s filozofijo. Izjemen dar za pisanje je ohranil in s pridom uporabljal vse življenje.

Matematiki je posvetil življenje ne samo zato, ker se je že kot dijak zavedal, da bo v njej najhitreje in najlažje izstopal iz še tako dobre skupine drugih, ampak tudi zato, ker ga je pri 14 letih očarala knjiga *A Fellow of Trinity* avtorice Frances Marshall, ki jo je izdala pod psevdonimom Alan St. Aubin. V tem povprečnem delu je bil opisan izjemno naporen študij na Trinityju. Ta je prinesel tistim, ki jim je uspelo ostati kot profesorji na njem, neizmerno zadoščenje in slavo. Postati najboljši med najboljšimi je bil Hardyjev cilj, ki ga je tudi dosegel, čeprav je bil samo *Četrti Wrangler* na *Triposu*.

Slika 9: Trinity College, veliko dvorišče

Hardyjeva mentorja pri doktoratu (1903) sta bila A. E. H. Love (1863–1940) in E. T. Whittaker (1873–1956). Love ga je uvedel v francosko in nemško matematiko. Jordanova knjiga *Cours d'analyse de l'Ecole Polytechnique* je Hardyju že leta 1896 spremenila pogled na matematiko in s tem tudi njegovo življenje. Sam je zapisal [7, str. 111]:

> *Moja vdanost matematiki je res najbolj ekstravagantna in fanatična. Verjamem, da jo ljubim, in vem, da bi bil nesrečen brez nje [...] Raziskovanje v matematiki mi pomeni neprekinjeno srečo mojega življenja.*

Od leta 1898 je bil član tajne bratovščine Cambridge Apostles, ki še vedno deluje vse od ustanovitve leta 1820. V Hardyjevem času so bile med njenimi člani izjemne osebnosti, kot so pesnik Tennyson, filozof Whitehead, fizik J. C. Maxwell in Hardyjev dolgoletni prijatelj, logik in filozof Bertrand Russell (1872–1970).

15 Henry Frederick Baker (1866–1956). *Senior Wrangler* in profesor na Univerzi v Cambridgeu, se je ukvarjal z algebraično geometrijo, o kateri je napisal šest temeljnih del, pa tudi s funkcijami theta in astronomijo.

16 Ernest William Hobson (1856–1933), *Senior Wrangler* in *FRS*.

17 G. H. Hardy, *Orders of infinity. The »Infinitärcalcül« of Paul du Bois-Reymond*, Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics 12, Cambridge University Press, Cambridge, 1910.

Slika 10: Hardy (levo) in Littlewood okrog leta 1924

Že v letu 1899, ko je Hardy končal z drugim delom izpita *Tripos*, je postal član Trinityja. Takrat je tudi pričel z objavljanjem matematičnih prispevkov, sprva v obliki vprašanj za časopis *Educational Times*. Prvo knjigo *The integration of functions of a single variable*, ki je izšla leta 1905 v sklopu Cambridge Tracts, je napisal, da bi posodobil teoretično matematiko v Angliji. Vendar se je to zgodilo šele s prelomnim učbenikom *A course of pure mathematics*, ki je izšel leta 1908 in ga je napisal po vzoru Jordanove *Cours d'analyse*. Učbenik je do leta 1952 doživel 10 izdaj in je tako še v dvajsetem stoletju močno vplival na poučevanje matematike.

Za obdobje 1906–1919 je bil Hardy nastavljen za predavatelja matematike. Že na začetku je dobil nalogo modernizirati izpit *Tripos*. Tega je preprosto ukinil, čeprav so ga pozneje v milejši obliki uvedli nazaj. Zaradi nadpovprečnih dosežkov je bil kmalu izvoljen za *FRS*[18] (1910), štiri leta kasneje pa so mu podelili častni naziv *Cayley Lecturer in Mathematics*.

Hardy je rad sodeloval z drugimi matematiki. Pravil je, da ima vsak avtor skupnega članka veliko več kot pol zasluge zanj. Leta 1912 je izdal 9 člankov. Prvi med njimi, *Some Problems of Diophantine Approximation*, ki je nastal v sodelovanju z **J. E. Littlewoodom**[19] (Slika 10), je izšel v sklopu petega mednarodnega kongresa matematikov v Cambridgeu. Njuno več kot 30-letno sodelovanje, katerega bera je blizu 100 člankov, je kmalu preraslo v legendo[20].

Potem pa je prišlo leto 1913, ko je v Hardyjevo življenje vstopil Ramanujan.

Začetek znamenite naveze Ramanujan-Hardy

Hardy je po smrti Ramanujana na vprašanje o poznanstvu z njim odgovoril:

> *Dolgujem mu več kot komurkoli na svetu, z eno izjemo, in moje družabništvo z njim je edini romantični pripetljaj v mojem življenju.*

Kanigel v [7, str. 370] ponuja Littlewooda za izjemo. Kot bomo v nadaljevanju videli, malce tragičen prizvok v drugem delu stavka ni naključje.

Pismo, ki ga je 16. januarja 1913 Ramanujan poslal Hardyju, velja za najslavnejše pismo v zgodovini matematike in je zaznamovalo Ramanujanovo nadaljnjo življenjsko pot. Čitljivo napisano pismo, ki je izražalo samozavest pisca, je s prilogami vred obsegalo 12 strani in se je pričelo takole [4, str. 21]:

> *Dragi gospod,*
> *dovolite, da se vam predstavim. Sem uslužbenec računovodskega oddelka Velike pristaniške družbe iz Madrasa z letnim zaslužkom samo 20 rupij. Imam okoli 23 let. Nimam univerzitetne izobrazbe, sem pa naredil običajne šolske tečaje. Ves svoj prosti čas varčno uporabim za samostojne matematične raziskave. Naredil sem posebno raziskavo o divergentnih vrstah na splošno in rezultati, ki sem jih dobil, so »presenetljivi«.*

V pismu in prilogah je Ramanujan zapisal okoli 50 formul s področja teorije števil, integralov, neskončnih vrst, transformacij vrst in integralov, približne integracije in sumacije, neskončnih verižnih ulomkov ter divergentnih vrst.

Citirajmo le odlomek s področja teorije števil [4, str. 22–23]:

> *Našel sem funkcijo, ki natančno izraža število praštevil, manjših od x, »natančno« v smislu, da je razlika med funkcijo in dejanskim številom praštevil v splošnem 0 ali pa majhna končna vrednost, tudi ko gre x proti neskončnosti. To funkcijo sem dobil v obliki neskončne vrste in jo izrazil na dva načina [...] Prav tako sem našel izraz, kako najti dejansko število praštevil v obliki $Ax + B$, ki je vedno manjše od danega števila ne glede, kako je to veliko.*

Ramanujan je še omenil, da mu je poslal samo delček svojih rezultatov, ne pa tudi raziskav, s katerimi se trenutno ukvarja.

Pismo je udarilo v srčiko Hardyjeve samozaverovanosti in ponosa. Izjavo, da mu Ramanujan ne bo dodal raziskav, s katerimi se trenutno še ukvarja, je Hardy vzel za neprijazno, vzbudila pa mu je tudi radovednost. Priloga desetih strani, popisanih z enačbami in izreki brez dokazov, ki naj bi jih Hardy kar mimogrede preve-

18 *FRS* je kratica za *The Fellow of Royal Society* (Član Kraljevega društva). To častno imenovanje so tedaj podelili samo izjemnim strokovnjakom, ki so s svojimi deli bistveno prispevali k razvoju ali uveljavitvi svoje stroke. Članstvo ni pomenilo samo izjemno čast in velik ugled, ampak je članu prinašalo v prvih šestih letih po izvolitvi tudi visoko finančno podporo. Od leta 1987 dalje so v to visoko družbo sprejeli tudi nekatere člane britanske kraljeve družine.

19 John Edenson Littlewood (1885–1977), *Senior Wrangler* (1905), je deloval v analitični teoriji števil, diferencialnih enačbah in algebraični geometriji. Leta 1908 je bil izvoljen za člana Trinityja. Tri leta je deloval na Univerzi v Manchestru, preostanek kariere do upokojitve leta 1950, pa na Cambridgeu. Leta 1916 je postal *FRS*. Pozneje je prejel več odmevnih matematičnih nagrad. Hardy ga je opisal kot izrednega matematika, ki nima konkurence v svojih miselnih sposobnostih, uvidih, razumevanju, reševanju problemov in znanju.

20 Znana je anekdota, da je nemški matematik Edmund Landau obiskal Anglijo z edinim namenom prepričati se, da je Littlewood le plod Hardyjeve domišlije, ki mu pomaga zakrivati Hardyjeve napake. Prav tako je odmevna anekdota danskega matematika Haralda Bohra, ki je svojim kolegom na srečanju leta 1947 dejal: *Dandanes so samo trije veliki angleški matematiki: Hardy, Littlewood in Hardy-Littlewood.*

ril, je bila nenavadna in skrivnostna. Še bolj pa Ramanujanova prošnja, da naj Hardy zato, ker je on reven, kar sam poskrbi, da bodo te njegove matematične ugotovitve tudi objavljene. Pismo je zaključila fraza zahvale in hvaležnosti [4, str. 22]:

Ostajam, dragi gospod, resnično Vaš,
S. Ramanujan

Dodal je tudi že natisnjeni članek o Bernoullijevih številih.

Pismo je Hardyja vznemirilo in zmedlo. Ni se mogel odločiti, ali gre za veliko potegavščino nekoga, ki v Indiji pozna *Tripos*, ali pa je vse skupaj morda vseeno delo ekscentričnega genija. Po razrešitev zagate se je napotil k Littlewoodu. Skupaj sta še istega dne in pozno v noč pregledovala in razreševala nastalo uganko. Littlewood je bil do Hardyjeve domneve, da je vsebina pisma lahko prevara, zadržan. Bolj je verjel, da gre za zelo izvirno in smelo delo.

Skupno branje, študij nekaterih formul iz prilog, ki bodo obravnavane v drugem delu članka, in razpravljanje pozno v noč je oba matematika privedlo do spoznanja, da poslano gradivo, ki ga sicer ne znata v celoti pojasniti, ni potegavščina, ampak delo samosvojega najodličnejšega matematika z izjemno domišljijo in obsežnim, toda neurejenim znanjem. Hardy se je takoj odločil, da mora tega genija pripeljati k sebi na Cambridge. Ne da bi Ramanujanu najprej odgovoril na njegovo pismo in mu v njem sporočil to svojo namero, je kar začel pripravljati teren za njegov prihod in s tem naredil veliko napako. Ramanujanovo pismo je kazal vse naokrog, zato so se na Cambridgeu začele pojavljati govorice. Pri tem se profesorja Baker in Hobson nista izdala, da sta podobno pismo prejela od istega avtorja pred tem tudi onadva.

V nasprotju s to gorečnostjo, pripeljati Ramanujana v Anglijo, pa mu je Hardy odgovoril z dolgim in neprijaznim pismom 8. februarja 1913. Dodal je, da so poslani zapisi nejasni, brez dokazov, zato je zelo težko preveriti njihovo pravilnost. Vse poslano gradivo je razvrstil v tri kategorije:

- v prvo je dal izreke, ki so bili že poznani ali so se tem bolj ali manj približali;
- v drugo je dal nove in zanimive izreke, toda bolj zaradi skrivnostnega značaja kot pomembnosti;
- v tretjo, za Hardyja najpomembnejšo skupino, pa izreke, za katere je menil, da bi utegnili biti zelo pomembni, če bi bili dokazani.

Napisal je, da dokaze izrekov iz tretje skupine želi videti, saj bo šele takrat lahko začel razmišljati o njihovi objavi. Izrazil je tudi zanimanje za Ramanujanovo delo v povezavi s praštevili in z neskončnimi vrstami. Nič pa ni omenil:

- da je imel ob branju poslanega gradiva sam težave, ker je Ramanujan uporabljal nestandardne simbole, ki jih ni nikjer pojasnil;
- da ne more dati ocene o pravilnosti njegovih trditev brez Ramanujanovih dokazov, ker zapisane trditve sam ne zmore dokazati;
- da si on sam zelo želi, da bi spoznal njegov način dela;
- da ga tudi zelo zanima, kaj raziskuje zdaj.

Pismu je dodal še tri Littlewoodove opombe.

Medtem ko je Ramanujan še nestrpno čakal Hardyjev odgovor na svoje pismo, je od indijskih veljakov izvedel, da ga Hardy po drugih kanalih izjemno hvali in mu že pripravlja pot v Anglijo. To ga je zelo začudilo, ob neprijazni vsebini prispelega Hardyjevega odgovora pa se je zato počutil prevaranega. Iz pisma, brez povabila za Anglijo, je vela predvsem Hardyjeva zahteva, naj mu čim prej pošlje rigorozne dokaze svojih trditev, naštete so bile njegove napake, ki sta jih z Littlewoodom našla v poslanem gradivu.

Potrt, a ne »uklonjen« Ramanujan je tako v odgovoru Hardyju dne 27. 2. 1913 na šestih straneh deloval prepričljivo, samozavestno in na nekaterih mestih celo vzvišeno. Začel je z uvodom, da je vesel, da je Hardy s simpatijo sprejel njegovo delo. Potem je zatrdil, da za svojimi izreki stoji, da so pravilni, četudi se morda zdi, da temeljijo na šibki osnovi. Vse, kar je sledilo v pismu, pa je bilo napisano spet zelo originalno in podobno kot v prvem pismu. Bralec lahko uvidi, da se Ramanujan ni niti malo potrudil, da bi Hardyju ugajal, in da mu je preprosto vseeno, kaj si Hardy misli o njem. Iz zapisa veje tudi Ramanujanovo presenečenje, da tako priznan matematik ne uvidi pravilnosti zapisanega, ampak se mu številni njegovi izreki zdijo celo zahtevni. V bran pravilnosti svojih trditev je navedel [4, str. 53]:

Vi zahtevate od mene dokaze tako kot drugi londonski profesorji. Ampak njim jih nisem dal. Sem pa odgovoril z nekaj primeri, ki izhajajo iz moje teorije.

Navedel je primer neskončne vsote po naravnih številih, ki ga je zapisal že v prvem pismu [4, str. 53]:

Če je tudi Vaš rezultat enak, potem je nekaj na moji teoriji. Če pa Vam dam svojo metodo, ki ima morda kako napako v katerem koli koraku, pa se s temi koraki ne boste mogli prepričati o pravilnosti računa [...]

Svojo prizadetost je razkril šele na koncu pisma [4, str. 54]:

Že sedaj sem napol izstradan človek. Da ohranim svoje možgane, potrebujem hrano in zdaj je to moja poglavitna skrb. Vsakršno naklonjeno pismo z Vaše strani bi mi omogočilo, da dobim ustrezno podporo s strani Univerze ali države [...] Lahko me ostro obsodite, ker molčim o metodah dokazov, toda ne mislim, da bi te metode morale umreti z menoj.

V pismu je brez pojasnila navedel tri približne formule za število praštevil, npr.

$$\pi(n) \approx \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k}{(2k-1)\,|B_{2k}|} \left(\frac{\log n}{2\pi}\right)^{2k-1}.$$

Med poslanim je bilo tudi neko novo transformacijsko pravilo za hipergeometrijske vrste, katerega dokaz pa je Hardy objavil šele leta 1923.

Toda tudi Hardy se ni vdal. Odgovor Hardyja na drugo Ramanujanovo pismo, ki ga je odposlal 26. marca 1913, je bil skrajno zadržan, strog in neprijazen. V njem mu je suhoparno nanizal več njegovih napak, ki jih je prepoznal Littlewood. Dodal je še več Littlewoodovih natančnih opomb in ga spet grajal, ker mu ni poslal dokazov. Pri tem se je skliceval tudi na podobna mnenja nekaterih svojih kolegov. Hardy je tudi trdil, da ima Ramanujan že tri njegove dolge odgovore, kar pa ni bilo res. Hardyjevi osornosti je morda botrovalo tudi to, da je marca 1913 izvedel, da Ramanujan zavrača pot v Anglijo.

Vsebina in način povedanega je Ramanujanu jasno pokazala, da Hardyja mineva potrpljenje kljub temu, da mu je Littlewood ob branju drugega Ramanujanovega pisma zatrdil [7, str. 205]:

> *Verjamem, da je Ramanujan najmanj Jacobi.*

Ramanujan, ki je medtem doživel priznanje v Indiji tudi na račun svojega dopisovanja s Hardyjem, je v bolj spravljivem tonu odgovoril 17. aprila 1913. To razberemo iz naslednjega citata [4, str. 81]:

> *Malo me je prizadelo vaše pisanje, ki je nastalo pod vplivom gospoda Littlewooda. Niti malo se ne bojim, da moje metode ne bi bile uporabne tudi za druge. Nasprotno, v zadnjih osmih letih nisem naletel na nikogar, ki bi mi jih oporekal. Kot sem pisal v svojem zadnjem pismu, sem v vas našel simpatičnega prijatelja in pripravljen sem vam, povsem brez omejitve, izročiti tisto malo, kar imam.*

Kljub svoji uklonitvi pa je Hardyju vseeno oporekel, da od njega ni prejel treh, ampak samo dve pismi. Izrazil je tudi začudenje, da ga Hardy nikoli ni vprašal nič osebnega, da pa je morda to storil v pismu, ki ga ni prejel. Pohvalil se je, da mu je medtem lokalna univerza dodelila šolnino 60 funtov letno za dobo dveh let. Zdaj se bo potrudil in poslal tako zaželene dokaze o razporeditvi praštevil.

Fotografije

Slika 1: Ramanujanova otroška soba v Kumbakonamu
https://valuevar.wordpress.com/2012/01/01/four-squares-jacobi-ramanujan/
Pravice proste.

Slika 2: B. C. Berndt z Ramanujanovo tablico
https://faculty.math.illinois.edu/~berndt/
Z dovoljenjem B. C. Berndta.

Slika 3: Originalne beležke, danes shranjene v knjižnici Univerze v Madrasu
https://www.thehindu.com/sci-tech/science/3-notebooks-of-Ramanujan-being-microfilmed/article15713504.ece
Vir: The Hindu, pravice proste.

Slika 4: Druga izdaja faksimil vseh treh beležk v dveh knjigah, foto Aleksander Simonič.

Slika 5: Državni kolidž v Kumbakonamu
https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Kumbakonam_College.jpg
Vir: WikimediaCommons, licenca CC BY.

Slika 6: Kolidž Pachaiyappa v Madrasu

Slika 7: Sir Francis Spring
https://en.wikipedia.org/wiki/Francis_Spring
Vir: Wikipedija, pravice proste.

Slika 8: S. Narayana Aiyar
https://www.arunachala.org/newsletters/2013/mar-apr
Vir: ArunachalaAshrama, pravice proste.

Slika 9: Trinity College, veliko dvorišče
https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Trinity_College_-_Great_Court_02.jpg
Vir: WikimediaCommons, licenca CC BY-SA.

Slika10: Hardy in Littlewood leta 1924
http://trinitycollegechapel.com/about/memorials/brasses/hardy/
Vir: TrinityCollegeChapel, pravice proste.

Literatura

[1] L. V. Ahlfors, *Complex analysis: An introduction to the theory of analytic functions of one complex variable*, 3rd ed., McGraw-Hill, 1979.

[2] B. C. Berndt, *Ramanujan's notebooks*, Math. Mag. **51** (1978), 147–164.

[3] B. C. Berndt, *Ramanujan's Notebooks, Part I*, Springer-Verlag, New York, 1985.

[4] B. C. Berndt, R. A. Rankin, *Ramanujan: Letters and commentary*, History of Mathematics 9, AMS, London Mathematical Society, 1995.

[5] B. C. Berndt, R. A. Rankin, *The books studied by Ramanujan in India*, Amer. Math. Monthly **107** (2000), 595–601.

[6] B. C. Berndt, C. A. Reddi, *Two exams taken by Ramanujan in India*, Amer. Math. Monthly **111** (2004), 330–339.

[7] R. Kanigel, *The man who knew infinity: a life of the genius Ramanujan*, Washington Square Press, 1991.

[8] S. Ramanujan, *Collected papers*, University Press, Cambridge, 1927.

[9] S. S. Wagstaff, Jr., *Ramanujan's paper on Bernoulli numbers*, J. Indian Math. Soc. (N.S.) **45** (1981), 49–65.